Semantik von PL1

Unsere Reise durch die Welt der Formalen Methoden 2 starteten wir im Land der AL, in dem wir von der Syntax zur Semantik reisten. Zur Überprüfung der Gültigkeit von Schlüssen oder Schlussschemata verwendeten wir semantische Entscheidungsverfahren für AL, in deren Rahmen wir auf die Bewertung von Formeln mit Wahrheitswerten zurückgriffen (wir erinnern uns an die Wahrheitstafel- und die Reduktionsmethode). Anschließend lernten wir als ein rein syntaktisches Herangehen das SNS_{AL} kennen. Eine ähnliche Route verfolgen wir auch im Land der PL, in dem wir zuletzt noch – über einen kurzen Umweg durch die semantische Repräsentation – in der syntaktischen Region des natürliches Schließens in PL unterwegs waren, um jetzt umso tiefer in die Semantik einzutauchen. Nachdem wir mit dem SNS_{PL} bereits ein rein syntaktisches Herangehen zur Gültigkeitüberprüfung von Schlüssen verfolgten, entdecken wir heute ein rein semantisches Herangehen, das auf konstanten semantischen Regeln basiert, die mit variablen Modellen und Variablenbelegungen arbeiten.

Bevor wir zu den besagten semantischen Regeln kommen, schauen wir uns ihre Grundlagen genauer an. Um den Begriff des Modells verstehen zu können, müssen wir erst einmal begreifen, was **Interpretationen** im Rahmen der Semantik von PL1 bedeuten. Für eine PL1-Sprache L benötigen wir eine Interpretation I, die als Funktion jeder Konstanten (IK und PK) ein Element der Diskursdomäne D zuweist. Ohne diese Interpretation könnten wir eine PL-Aussage wie $V(a, b)$ inhaltlich nicht bewerten, da wir dafür wissen müssen, dass sowohl Anton $\in D$ als auch Berta $\in D$, $I(a) =$ Anton, $I(b) =$ Berta und $\langle$Anton, Berta$\rangle \in I(V)$, d.h., dass das geordnete Paar aus Anton und Berta Element der Menge ist, die nur geordnete Paare von Elementen d und d' der Menge D enthält, bei denen d dem d' vertraut. Kennen wir diese Interpretation, so können wir die Gültigkeit der Aussage „Anton vertraut Berta“ bestätigen. Ein **Modell** M ist nun nichts weiter als eine vereinfachte Darstellung der Welt für L, die aus D und I besteht, wobei D unsere Diskursdomäne ist, die unter anderem Anton und Berta enthält, und I eine Interpretation beschreibt, welche jeder IK und PK einen Wert zuweist, der aus einem Element von D besteht (IK) bzw. aus einer Menge von einem Element oder mehreren Elementen von D (1-stellige PK), die ggf. zusammengefasst sind in Form von geordneten Paaren (2-stellige PK) oder n-Tupeln (n-stellige PK).

Haben wir solch ein Modell für unsere Sprache, so fehlt uns allerdings immer noch das nötige Wissen, um die Gültigkeit einer Aussage wie $\exists x V(x, b)$ bewerten zu können. Dies liegt daran, dass wir dafür Kenntnis von den **Variablenbelegungen** brauchen, d.h. in unserem Fall: Kenntnis von dem semantischen Wert von x. Die Variablenbelegung g übernimmt also die gleiche Aufgabe wie unsere Interpretation I, allerdings mit dem Unterschied, dass sie Variablen (und nicht Konstanten) einen Inhalt gibt. Den semantischen Wert der IV können wir ferner mittels der Schreibweise $g[\gamma \to d]$ variieren, wobei γ eine IV und d ein Element von D ist; wir können also aus dem Stegreif Varianten von g erzeugen. Der Ausdruck $g[x \to \text{Anton}]$ beschreibt demnach eine Variante von g, bei der x den semantischen Wert Anton hat. In der Konsequenz ist die Anwendung dieser Variablenbelegung g auf die IV x nichts anderes als Anton selbst, d.h. $g[x \to \text{Anton}](x) = \text{Anton}$.

Nun haben wir das nötige Gepäck beisammen, um **semantische Regeln von PL1** zu betrachten, mit denen wir die Wahrheitswerte von PL1-Formeln kompositionell errechnen können. (1) Ein Typ von semantischen Regeln existiert zur Bestimmung der semantischen Werte von nicht-logischen Grundausdrücken bezüglich M und g. Hierbei entspricht eine IK bzw. IV im Modell M unter der Variablenbelegung g, wir schreiben $[\![\tau]\!]^{M,g}$ oder $[\![\pi]\!]^{M,g}$, der gegebenen Interpretation I der jeweiligen IK bzw. der Variablenbelegung g der IV. (2) Ein weiterer Typ von semantischen Regeln existiert zur Bestimmung der Wahrheitswerte von Formeln bezüglich M und g. Diese solltest du genau lesen und verinnerlichen, da sie den Kern der Berechnung der Wahrheitswerte von Formeln bilden. (3) Ein letzter Typ von semantischen Regeln existiert zur Bestimmung der Wahrheitswerte von Formeln bezüglich M, d.h. von geschlossenen Formeln, die keine freien Vorkommen von Variablen enthalten und somit unabhängig von einer Variablenbelegung sind.

Widmen wir uns der **Berechnung der Wahrheitswerte von Formeln**, so erkennen wir, dass diese im Prinzip ausschließlich die Anwendung der semantischen Regeln von PL1 auf die gegebene Formel umfasst. Nehmen wir erneut als Beispiel unsere geschlossene Formel $V(a, b)$ in dem oben beschriebenen Modell M, so wäre der erste Schritt die Anwendung der Regel D5.5 (1): $[\![V(a,b)]\!]^{M,g} = 1$ genau dann, wenn $\langle [\![a]\!]^{M,g}, [\![b]\!]^{M,g} \rangle \in [\![V]\!]^{M,g}$. Dann wenden wir D5.4 (1) und (3) an und kommen zu: $\langle [\![a]\!]^{M,g}, [\![b]\!]^{M,g} \rangle \in [\![V]\!]^{M,g}$ genau dann, wenn $\langle I(a), I(b) \rangle \in I(V)$. Es folgt $\langle I(a), I(b) \rangle \in I(V)$ genau dann, wenn $\langle Anton, Berta \rangle \in D$ (wobei ich D hier der Einfachheit halber nicht definiert habe). Wir sagen als nächstes: Es gilt: $\langle Anton, Berta \rangle \in D$. Deswegen ist schließlich $[\![V(a,b)]\!]^{M,g} = 1$. Im Skript findest du weitere Beispiele für die Berechnung der Wahrheitswerte von Formeln, die auch den Umgang mit komplexen Formeln abdecken, die den Konnektor $\wedge$ oder die Quantoren $\exists$ und $\forall$ beinhalten. Beachte bei der Anwesenheit von Quantoren, dass sich bei deren Auflösung die Variablenbelegung g in eine Variante $g[\gamma \to d]$ umwandelt, bei der γ der jeweiligen IV entspricht.

Zur Semantik von PL1 stellt Michaelis insgesamt drei Übungsaufgaben, die für die Erbringung der Studienleistung relevant sind. In einer ersten Aufgabe sollen anhand der semantischen Regeln Wahrheitswert von Aussage in einem (im Skript gegebenen) Modell schrittweise berechnet werden. Anschließend sollen Wahrheitswerte einer Aussageform in einem Modell überprüft werden, wobei als Variablenbelegung eine neue Variante gegeben ist. Abschließend sollen für Aussage mit Blick auf deren Interpretation im Modell natürlichsprachliche Korrelate angegeben werden. Wie immer gilt: Falls Fragen auftauchen, kann unser Forum im Studienraum konsultiert werden, das ich regelmäßig besuche. Da nächste Woche die Fortsetzung des Themas auf dem Plan steht, werde ich dann voraussichtlich erneut individuelle (Video-)Treffen anbieten, um eventuell bestehende Fragen zu den bisherigen Themen und Aufgaben persönlich besprechen zu können. Schreib mir gerne eine Mail mit deinem Thema und einem Terminvorschlag, falls du dieses Angebot wahrnehmen möchtest.