Natürliches Schließen in PL1

In unserer vierten Sitzung zur Veranstaltung haben wir erstmals vom SNS_{AL} zur Überprüfung der AL-Gültigkeit von Schlüssen und Schlussschemata Gebrauch gemacht. Als rein syntaktische Herangehensweise basiert das System auf Ableitungsregeln, mittels denen neue Formeln aus Annahmen gewonnen werden können. Wir haben gesagt, dass ein Schlussschema genau dann AL-gültig ist, wenn es eine Ableitung der Konklusion aus den Prämissen gibt. Eine Ableitung betrachten wir dabei als eine Art Liste von Formeln, die (1.) aus Annahmen, (2.) mit Ableitungsregeln gewonnen Formeln und (3.) einer Konklusion besteht. Für jeden unserer Konnektoren in AL haben wir zwei Typen von Ableitungsregeln kennengelernt: Einführungsregeln (**E**) und Beseitigungsregeln (**B**).

Mittlerweile sind wir bereits einige Schritte weiter, denn wir beschäftigen uns mit PL, die zwar auf AL aufbaut, aber in ihrer Aussagekraft deutlich stärker ist. Ein zentrales Element der PL ist die Quantorisierung, für die wir den All- und Existenzquantor zu unserem Vokabular hinzugefügt haben. Nun wollen wir das SNS_{AL} derart ergänzen, dass wir es auch in der PL nutzen können, um die Gültigkeit von Schlüssen zu überprüfen. Dazu müssen wir Ableitungsregeln für unsere beiden Quantoren hinzufügen. Folglich erhalten wir das System des natürlichen Schließens (SNS_{PL}) als eine Erweiterung des SNS_{AL}.

Zuerst nehmen wir den **Existenzquantor** in den Blick. Mittels **E**$\exists$ können wir aus einer Formel $\phi[\tau/\gamma]$ die Formel $\exists\gamma\phi$ schließen. $\phi[\tau/\gamma]$ ist hierbei die Substitution von τ für γ in ϕ, bei der alle freien Vorkommen von γ in ϕ durch τ ersetzt werden (vgl. Kapitel 3.4 Syntax von PL1). In einem Beispiel des Skripts wird so aus der Formel $V(y)$, wobei V eine 1-stellige PK ist und für das Prädikat „vergänglich" steht, die Formel $\exists xV(x)$ gewonnen. In $V(y)$ wird y als die Substitution für x betrachtet, sodass bei der Voraussetzung $V(x)[y/x]$ die Konklusion $\exists xV(x)$ gültig ist. Haben wir nun eine Formel $L(n)$, wobei und L eine 1-stellige PK ist und für „Linguist" steht und n eine IK ist, so ist erneut $\exists xL(x)$ ableitbar. Der Unterschied ist, dass in $L(n)$ keine IV sondern eine IK das freie Vorkommen einer IV ersetzt hat; dies ist möglich, da τ in $\phi[\tau/\gamma]$ ein *Term* ist, der die freien Vorkommen der IV γ in der Formel ϕ ersetzt. Wollen wir zeigen, dass aus „Hans liebt Maria." der Satz „Also liebt jemand jemanden." geschlossen werden kann, gehen wir wie folgt vor: L sei eine 2-stellige PK, die für das Prädikat „lieben" steht. Ferner sei sowohl h als auch m eine IK, die für „Hans" bzw. „Maria" steht. Unsere Annahme ist $L(h,m)$ und unsere Konklusion lautet $\exists x\exists y[L(x,y)]$. Die Formel $L(h,m)$ betrachten wir als $L(h,y)[m/y]$ und leiten $\exists yL(h,y)$ ab, was wir wiederum als $\exists yL(x,y)[h/x]$ betrachten, sodass wir zu unserem Schluss $\exists x\exists y[L(x,y)]$ gelangen.

Umgekehrt zu dieser Einführungsregel können wir mittels **B**$\exists$ aus einer Formel $\exists\gamma\phi$ auf die Formel $\phi[\kappa/\gamma]$ schließen. Das Zeichen κ (Kappa) ist hierbei eine Hilfs*konstante*, die wir für die IV γ in der existenzquantisierten Formel ϕ einsetzen. Diese Hilfskonstate kann allerdings nicht in der Konklusion einer Ableitung vorkommen, da sie keine IK im eigentlichen Sinne ist. Außerdem muss stets eine neue Hilfskonstate gewählt werden, wenn diese Regel angewendet wird, da ansonsten Existenzen vermischt werden. Tust du dies nicht, so gewinnst du z.B. aus den beiden Annahmen „Einige Vögel können fliegen." und „Einige Vögel können nicht fliegen." den unsinnigen Satz „Einige Vögel können fliegen und nicht fliegen."

Jetzt schauen wir uns noch die Ableitungsregeln für den **Allquantor** an. Mittels **E**$\forall$ können wir aus einer Formel $\phi[\gamma'/\gamma]$ die Formel $\forall\gamma\phi$ schließen. Bedingung hierfür ist, dass γ in den Annahmen der Ableitung nicht frei vorkommt. Implizit nehmen wir an, dass γ frei in ϕ ist für γ' und insbesondere kann γ' identisch sein mit γ. Überlegen wir uns nun, was es für die PL1-Formel $\phi[\gamma'/\gamma]$ heißt, dass sie als genau diese Formel zutrifft, landen wir bei der Erkenntnis, dass der Wahrheitswert der Formel immer 1 ist. Im Beispiel zur Regel ist ϕ die Formel $D(x) \to G(x)$ und außerdem sind γ' und γ identisch (und γ ist die IV x). Im Laufe der Ableitung nehmen wir an, dass die Aussageform $D(x) \to G(x)$, welche die zwei freien Vorkommen der Variable x enthält gültig ist und hierauf ist dann entsprechend **E**$\forall$ anwendbar. Einen Anmerkung von Michaelis möchte ich noch hinzufügen:

> „Damit die Einführungsregel in dem hier angegebenen allgemeinen Format korrekt formuliert ist, muss allerdings zusätzlich vorausgesetzt werden, dass, falls γ' verschieden ist von γ, γ' nicht frei vorkommt in ϕ. (Diese zusätzliche Bedingung steht so nicht einmal implizit im Skript)."

Umgekehrt zu dieser Einführungsregel können wir mittels **B**$\forall$ aus einer Formel $\forall\gamma\phi$ auf die Formel $\phi[\tau/\gamma]$ schließen. Wollen wir zeigen, dass bei den beiden Annahmen „Einige Zähne sind Goldzähne." und „Alle Goldzähne haben eine Krone." der Schluss „Also haben einige Zähne eine Krone." gültig ist, so gehen wir wie folgt vor: Wir starten mit den Annahmen, dass $\exists x[Z(x) \wedge G(x)]$ und $\forall x[G(x) \to K(x)]$, wobei Z, G und K 1-stellige PK sind, die für „ist ein Zahn", „ist ein Goldzahn" und „hat eine Krone" stehen. Anschließend ... (Du bist dran! Falls Fragen auftauchen, kannst du sie im Forum stellen.)

Zum Thema sind insgesamt vier Übungen zu bearbeiten. In einer ersten sollst du von Annahmen ausgehend mit $\mathrm{SNS}_{\mathrm{PL}}$ zeigen, welche Schlüsse gültig sind. In der zweiten Aufgabe sollst du zeigen, dass gegebene Schlüsse gültige $\mathrm{SNS}_{\mathrm{PL}}$-Schlüsse sind. Dann ist ein ungültiger Schluss gegeben und du sollst erklären, warum er nach dem $\mathrm{SNS}_{\mathrm{PL}}$ nicht gültig ist. Zum Schluss sollst du die $\mathrm{SNS}_{\mathrm{PL}}$-Gültigkeit von zwei Schlüssen beweisen. *Außerdem ist jetzt die Zeit gekommen, noch einmal Mengen, Operationen mit Mengen, Relationen und Funktionen mit Hilfe des vierten Kapitels im Dölling-Skript zu wiederholen.* Nächste Woche geht es dann mit unserem letzten Thema, der Semantik von PL1, weiter.