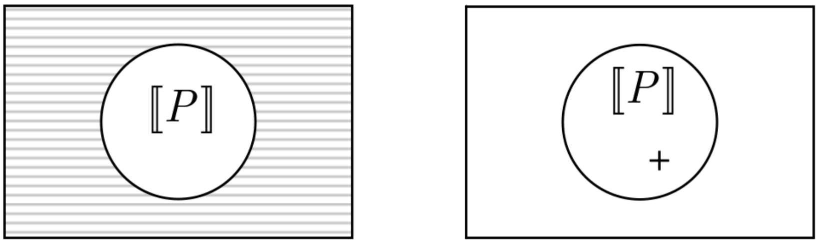
Semantische Repräsentation mit PL1

Da wir jetzt sagen können, was Prädikate und Individuenterme sind, welche Arten der Quantifizierung es gibt und wie die Syntax von PL1 aussieht, betrachten wir nun die semantische Repräsentation natürlichsprachlicher Sätze mit PL1. Im Fokus unseres Interesses liegen Sätze, die im Zuge der PL1-Formalisierung Quantorausdrücke erhalten und wir eruieren mit logischer Genauigkeit, auf welche Art und Weisen wir ausdrücken können, was die Sätze in natürlicher Sprache beschreiben. Ausgangspunkt unserer Betrachtung sind einfache all- und existenzquantifizierte Sätze, die Wörter wie *jeder, alle* bzw. *ein, einige, manche* enthalten. Im Abschnitt zu den Quantoren haben wir gelernt, dass wir solche Sätze mit Hilfe des All- und Existenzquantors in Form von $\forall x P(x)$ bzw. $\exists x P(x)$ generalisieren bzw. partikularisieren können und diese LF als „Für jedes / mindestens ein x gilt: $P(x)$" lesen. Zudem haben wir uns die geometrischen Darstellungen der Wahrheitsbedingungen solcher Aussagen angeschaut (Abbildung 1):

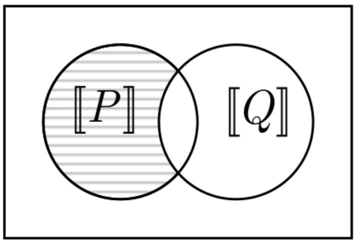


(a) $\forall x P(x)$ (b) $\exists x P(x)$

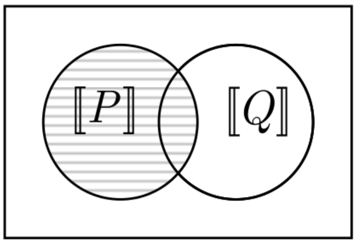
Abbildung 1: Geometrische Darstellungen der erfüllten Wahrheitsbedingungen

Nehmen wir als Beispiel die Sätze (1) „Jeder Mensch ist frei." und (2) „Ein Mensch ist frei.", so wird durch diese Darstellungen deutlich, dass die Domäne D der Aussagen nur Individuen enthält, die Menschen sind. Für den Fall, dass wir ein Universum haben, in dem beliebige andere Individuen existieren, beispielsweise Milchkühe, müssen wir die Aussage umformen, sodass sie weiterhin gelten kann. Im ersten Fall drücken wir **Allsätze als generalisierte materiale Implikationen** aus, welche die Form $\forall x[M(x) \rightarrow F(x)]$ haben, was wir als „Für jedes Individuum x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann ist x frei." lesen. In Abbildung 2 sind erneut die erfüllten Wahrheitsbedingungen geometrisch dargestellt. Wir sehen, dass unsere erste Aussage wahr ist, wenn kein Individuum existiert, das Menschen ist und nicht frei ist (a); die Aussage ist allerdings auch wahr, wenn überhaupt kein Individuum existiert, das Mensch ist (b).

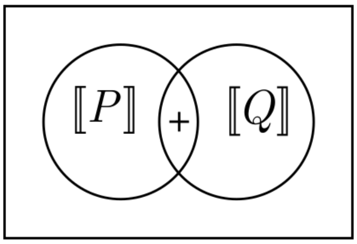
Im zweiten Fall drücken wir **Existenzsätze als partikularisierte Konjunktionen** aus, welche die Form $\exists x[M(x) \wedge F(x)]$ haben, was wir als „Für mindestens ein Individuum x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann ist x frei.“ lesen. Abbildung 2 (c) veranschaulicht die erfüllten Wahrheitsbedingungen für unsere zweite Aussage: Sie ist genau dann war, wenn die Schnittmenge aus Menschen und freien Individuen mindestens ein Individuum enthält und somit mindestens ein freier Mensch existiert; im Gegensatz zum Allsatz gehört diese Existenz zur Wahrheitsbedingung. Wenn einige Menschen frei sind, dann existiert womöglich auch ein Mensch, der nicht frei ist; wie können wir diesen Fall ausdrücken? Sind ferner Sätze wie „Alle / Einige Menschen sind frei.“ und „Kein / Nicht jeder Mensch ist unfrei.“ synonym? Mit Hilfe der geometrischen Darstellung der Wahrheitsbedingungen kannst du es herausfinden, da sie im Falle der Synonymität identisch sind. (Probier es doch einmal aus mit „Alle Milchkühe sind unfrei.“ und „Keine Milchkuh ist frei.“. Wie würde analoge Formulierungen aussehen, die Existenzsätze darstellen?)



(a) $\forall x[P(x) \to Q(x)]$



(b) $\forall x[P(x) \to Q(x)]$



(c) $\exists x[P(x) \land Q(x)]$

Abbildung 2: Geometrische Darstellungen der erfüllten Wahrheitsbedingungen

Ein interessanter Fall der semantischen Repräsentation tritt auf, wenn eine **Skopusambiguität bei Sätzen mit Quantorausdrücken** vorliegt. Beispiele hierfür sind Sätze wie „Jede Milchkuh möchte von jemandem gemolken werden.“ oder „Nicht jedes Kalb trinkt eine Flasche Milch.“. In den Sätzen können *jemandem* und *eine* entweder auf beliebige Individuen verweisen oder aber auf ein einziges Individuum, von dem jede Milchkuh gemolken werden möchte bzw. auf eine einzige Flasche Milch, die nicht jedes Kalb trinkt. Durch eine unterschiedliche Reihenfolge der verwendeten Quantoren können wir diese Ambiguität ausdrücken, indem wir den ersten Satz als $\forall x \exists y M(x, y)$ und $\exists y \forall x M(x, y)$ formalisieren und den zweiten in der Form $\forall x[K(x) \to \exists y[M(y) \land \neg T(x,y)]]$ und $\exists y[M(y) \land \forall x[K(x) \to \neg T(x,y)]]$. Beachte hierbei, dass sich die Reihenfolge der Variablen im zweistelligen Prädikat nicht ändert sondern nur die Reihenfolge der All- und Existenzquantoren, folglich auch die Benennung der Variablen, die sie belegen und ggf. die Reihenfolge der Operatoren, die nötig sind, um Allsätze als generalisierte materiale Implikationen und Existenzsätze als partikularisierte Konjunktionen zu formalisieren. Kannst du die Frage beantworten, welche der beiden möglichen Lesarten spezieller ist und damit die weniger spezielle impliziert? Genauer gesagt: Impliziert $\forall x \exists y M(x,y)$ den Satz $\exists y \forall x M(x,y)$ oder ist es andersherum?

Ein letzter Punkt zum Thema der semantischen Repräsentation mit PL1 ist die **eingeschränkte Quantifikation**, die im Prinzip lediglich den Geltungsbereich der Quantoren im Vorhinein einschränkt. Unseren Satz „Jeder Mensch ist frei." sieht in der eingeschränkten Notation wie folgt aus: $\forall x{:}M(x)[F(x)]$. Das Prädikat, welches Menschen beschreibt, wird direkt vor den Allquantor gezogen, womit die zuvor vorhandene Implikation entfällt und nur noch das Prädikat nötig ist, welches die Freiheit eines Individuums angibt, das ausschließlich Mensch sein kann.

In den sechs Übungen zum Thema kannst du deine frische erworbenes Wissen direkt anwenden. Zuerst sollst du (wie in den obigen Beispielen) geometrische Darstellungen der Wahrheitsbedingungen von PL1-Formeln erstellen. Dann sind natürlichsprachliche Sätze und verschiedene PL1-Formeln gegeben und es steht zur Debatte, welche PL1-Formel als geeignete PL1-Repräsentation des jeweiligen Satzes gelten kann. In der nächsten Übung sollst du natürlichsprachliche Korrelate für PL1-Formeln finden. In den folgenden beiden Aufgaben ist es umgekehrt, denn es wird nach PL1-Repräsentationen für natürlichsprachliche Sätze gefragt. Die dazugehörige Diskursdomäne ist im zweiten Fall besonders Interessant, weil sowohl Fragen beantwortende Personen als auch Fragen selbst existieren, aber nur erstere (ausschließlich) Fragen beantworten. Die letzte Aufgabe besteht aus einer einfachen Zuordnung von passenden PL1-Repräsentation zu PL1-Formeln.