Quantoren und Syntax von PL1

In PL1 wird zum einen die logische Struktur einfacher Sätze, d.h. die Prädikat-Individuenterm-Struktur, und zum anderen die logische Struktur von Sätzen mit Quantorenausdrücken, d.h. die Quantor-Skopus-Struktur, analysiert. Nachdem wir uns letzte Woche mit Individuentermen und Prädikaten beschäftigt haben, stehen nun die Quantoren im Zentrum unseres Interesses. Anhand der Inhalte dieses Kapitels werden wir beispielsweise sagen können, ob die beiden Sätze „Jeder ist verheiratet oder nicht verheiratet.“ und „Jeder ist verheiratet oder jeder ist nicht verheiratet.“ synonym sind. Zuerst nehmen wir dafür quantifizierende Aussagen genauer unter die Lupe und betrachten anschließend die Syntax von PL1.

Durch die **Allquantifizierung** mittels des Allquantors $\forall$ können Allaussagen der Form $\forall x P(x)$ gebildet werden. Diese lassen sich bei genauerer Betrachtung in zwei Teile trennen: $\forall x$ und $P(x)$. Der erste Teil wird gelesen als „Für jedes x gilt:“ und der zweite Teil bildet das Prädikat, das für jedes x gelten soll. Den natürlichsprachlichen Satz „Jeder ist verheiratet.“ können wir zuerst in seine Explizitform (EF) bringen und sodann in seine LF überführen: „Für jedes x gilt: x ist verheiratet.“ schreiben wir dann als $\forall x V(x)$, wobei $V(x)$ ein 1-stelliges Prädikat ist und „x ist verheiratet“ heißt. Durch die **Existenzquantifizierung** mittels des Existenzquantors $\exists$ können wir analog Existenztaussagen der Form $\exists x P(x)$ bilden. Der einzige Unterschied ist, dass $\exists x$ als „Es gibt mindestens ein x, für das gilt:“ gelesen wird. $\exists x V(x)$ würde demnach welche Bedeutung haben? Genau, dass *manche* verheiratet sind. Und wenn „Niemand ist verheiratet.“ durch $\neg\exists x V(x)$ ausgedrückt wird, was bedeutet dann $\neg\forall x V(x)$?

Alle soeben getroffenen Aussagen setzen eine Menge von Individuen voraus, die Gegenstand dieser Aussagen sind. Wollen wir die Wahrheitsbedingung von quantifizierenden Aussagen untersuchen, dann müssen wir die betreffenden Diskursdomänen betrachten, d.h. die Mengen der Individuen, über die etwas ausgesagt wird. Dies können wir uns mit Hilfe von geometrischen Darstellungen der Wahrheitsbedingungen bildlich vor Augen führen, indem wir ein Diskursuniversum (die Menge aller Individuen) abgrenzen und in ihm die Denotation $[\![P]\!]$ des Prädikats (die Menge aller Individuen, auf die das Prädikat zutrifft) als „Planeten“ darstellen. Durch Schraffur des Universum bzw. des Planetens machen wir kenntlich, dass kein Individuum unseres Diskursbereiches Element der betreffenden Menge ist. Ein schraffiertes Universum heißt dementsprechend, dass alle Individuen auf dem Planeten leben und somit die Allaussage in Bezug auf das Prädikat P wahr ist. Ein schraffierter Planet bedeutet umgekehrt, dass alle Individuen im Universum herumschweben und die Existenztaussage bezüglich P falsch ist. Mittels eines + kennzeichnen wir, dass die betreffende Menge mindestens ein Element enthält. Ein + im Universum heißt demnach was für die Allaussage bezüglich P? Und was bedeutet das + auf dem Plantenen für eine entsprechende Existenztaussage?

Schauen wir uns die **Syntax von PL1** an, so sehen wir, dass sie auf der bereits gelernten Syntax von AL aufbaut. Neu hinzugekommen sind lediglich Prädikatskonstanten (PK) und Quantoren. Da IV, IK und PK Grundausdrücke von PL1 sind und jeder wohlgefomrte Ausdruck, d.h. jede endliche Folge von Grundausdrücken, eine Formel ist, können wir wie gewohnt unsere Konnektoren auch für PK und Quantoren verwenden. Bezüglich der Syntax ist zudem neu, dass $\forall\gamma[\phi]$ und $\exists\gamma[\phi]$ dann Formeln sind, wenn bereits ϕ eine Formel und γ eine IV ist. Mit Blick auf unsere Konventionen zur Klammereinsparung kommt hinzu, dass die beiden Quantoren mitsamt ihrer Variablen dieselbe Bindungstärke haben, wie der am stärksten bindende Konnektor, die Negation. So wie sich die Negation bei der Formel $\neg P(x) \wedge Q(x)$ nur auf $P(x)$ bezieht, so bezieht sich die Existenzquantifizierung in $\exists x P(x) \wedge Q(x)$ ebenfalls nur auf $P(x)$. Wie müsste die Formel geschrieben werden, damit die Existenzquantifizierung für $P(x) \wedge Q(x)$ gilt? Ferner ziehen wir die Negation direkt hinter den mit einer Variablen besetzten Quantor, wenn die gesamte Formel im Skopus des Quantors negiert ist.

Der Skopus eines All- oder Existenzquantors beschreibt in diesem Zusammenhang den Bereich, in dem der Quantor wirkt. Jeder Quantor hat einen Skopus und somit können in einer Formel mehrere Skopen vorkommen, die sich gegebenenfalls sogar überschneiden. Ein Quantor hat allerdings niemals einen Effekt auf Variablen, die außerhalb seines Skopus liegen; sie sind dann nicht gebunden sondern frei. Kommen keine freien Variablen in einer Formel vor, so nennen wir die Formel geschlossen (und nicht offen). Was sind die Skopen der Quantoren in $\forall z[\exists y Q(y, z) \wedge R(y, z)]$? Ist die Formel offen oder kommen in ihr freie Variablen vor? Falls letzteres zutrifft, welche Variablen sind frei und welche gebunden? Solltest du Fragen haben, so stelle sie gerne im Forum des Lernraums.

Schließlich können wir mittels Substitution freie Variablen in einer Formel durch eine andere Variable ersetzen, also etwa γ durch τ. Das ist kein Problem, weil sich lediglich der Name der Variable ändert. Wichtig ist hierbei, dass der Name nicht bereits in der Formel auftaucht, da dies einiges durcheinander bringen könnte. Eine gebundene Umbenennung führen wir durch, wenn wir durch einen Quantor gebundene Variablen umbenennen wollen. Hier passiert im Grunde nicht anderes als eine Substitution der freien Variablen in der Formel im Skopus des Quantors sowie die Ersetzung der gebundenen Variable, die den Quantor bestimmt, wodurch in der quantifizierenden Aussage alle durch den Quantor gebundene Variablen umbenannt werden.

Zurück zur Ausgangsfrage, ob die beiden Sätze „Jeder ist verheiratet oder nicht verheiratet.“ und „Jeder ist verheiratet oder jeder ist nicht verheiratet.“ synonym sind. Den ersten Satz können wir nun wie folgt über seine EF in seine LF überführen: „Für jedes x gilt: x ist verheiratet oder nicht verheiratet.“ schreiben wir dann als $\forall x[V(x) \vee \neg V(x)]$, wobei $V(x)$ immer noch ein 1-stelliges Prädikat ist und „x

ist verheiratet“ heißt. Der zweite Satz besagt in seiner EF „Entweder für jedes x gilt: x ist verheiratet oder für jedes x gilt: x ist nicht verheiratet.“ Die LF ist folglich $\forall x V(x) \vee \forall x \neg V(x)$. (Genau genommen handelt es sich um ein implizites entweder-oder.) Sind die beiden Sätze in der Konsequenz synonym? Wir haben eine logische Begründung an der Hand, warum dies nicht der Fall ist.

Insgesamt hast du nun das nötige Rüstzeug, um die sieben Aufgaben zum Thema zu bearbeiten. Erstens sollst du sagen, welche Ausdrücke gemäß der Definition PL1-Formeln sind und dies auch begründen. Zweitens ist gefragt, welche natürlichsprachlichen Sätze synonym sind und wie ihre LF aussieht. Mit einer Menge von Menschen als Diskursdömäne ist anschließend ein natürlichsprachlicher Satz gegeben, dessen wahrheitskonditional adäquate Negation zur Debatte steht. (Die Argumente deiner Wahl sind, wie gezeigt, die entsprechenden LF.) Viertens sollst du zwei wahre und zwei falsche Aussagen zu einer geometrischen Darstellung angeben. Dann sollst du die Wahrheitswert von geschlossenen PL1-Formeln herleiten, wobei du die Diskursdomäne sowie die Denotation von P beachten musst. Im Anschluss steht der Skupus von Quantoren und die Art von Variablenvorkommen im Fokus und welche Formeln offen oder geschlossen sind. Zuletzt sind PL1-Formeln paarweise gegeben und du sollst entscheiden, ob sie dieselbe Aussage haben.