

Natürliches Schließen in AL

Vorige Sitzung haben wir die Wahrheitstafelmethode und die Reduktionsmethode als Entscheidungsverfahren für AL kennengelernt, um die AL-Gültigkeit von Schlüssen und Schlusschemata mit Hilfe von Wahrheitswerten zu überprüfen. Nun führen wir eine rein syntaktische Herangehensweise (ohne Wahrheitswerte) ein, nach der ein Schlusschema genau dann AL-gültig ist, wenn es eine Ableitung der Konklusion aus den Prämissen gibt. Eine **Ableitung** kann man als eine Art Liste von Formeln betrachten, die (1.) aus Annahmen, (2.) mit Ableitungsregeln gewonnen Formeln und (3.) einer Konklusion besteht. Wir sprechen genau dann von der **AL-Ableitbarkeit** einer Formel ψ , wenn es eine Ableitung von ψ aus vorausgehenden Formeln ϕ_1, \dots, ϕ_n in AL gibt. In der Notation verwenden wir dafür das Zeichen für die logische Ableitbarkeit \vdash , also $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash_{AL} \psi$. Eine **AL-Beweisbarkeit** ist genau dann gegeben, wenn es eine Ableitung einer Formel ψ aus der leeren Menge von Annahmen gibt, d.h., die linke Seite der Ableitung ist leer: $\vdash_{AL} \psi$ (die Ableitung ist allgemeingültig, ein AL-Gesetz). Darüber hinaus besagen zwei **Metatheoreme über AL**, dass (1.) ψ genau dann eine AL-Folgerung aus ϕ_1, \dots, ϕ_n ist ($\phi_1, \dots, \phi_n \models_{AL} \psi$), wenn ψ eine AL-Ableitung aus ϕ_1, \dots, ϕ_n ist ($\phi_1, \dots, \phi_n \vdash_{AL} \psi$) und dass (2.) ψ genau dann eine Tautologie ist ($\models_{AL} \psi$), wenn ψ eine AL-Gesetz ist ($\vdash_{AL} \psi$).

Im Skript werden zwei Typen von deduktiven (schlussfolgernden) Systemen erwähnt. Das axiomatische System ist „ein System von grundlegenden Aussagen, Axiomen, die ohne Beweis angenommen und aus denen alle Sätze (Theoreme) des Systems logisch abgeleitet werden.“ (Wikipedia, Axiomensystem) Diese Art von deduktiven System benötigt in der Konsequenz sowohl Axiome als auch Ableitungsregeln, um eine Schlussfolgerung aus Prämissen treffen zu können. Wir lernen stattdessen ein **System des natürlichen Schließens für AL** (SNS_{AL}) kennen, das lediglich Ableitungsregeln zur Deduktion verwendet. Seine Struktur besteht aus Annahmen ϕ_1, \dots, ϕ_n , aus denen mittels der Anwendung von Ableitungsregeln ψ als Konklusion folgt. Hierfür existieren zwei Typen von Ableitungsregeln: *Einführungsregeln für Konnektoren* (E) und *Beseitigungsregeln für Konnektoren* (B). Für alle fünf Konnektoren unseres Vokabulars werden entsprechende E und B definiert. Dabei bezeichnet beispielsweise E_{\wedge} die Einführungsregel für die Konjunktion und B_{\wedge} ihre Beseitigungsregel(n). Außerdem stehen in diesen Definitionen m_1, \dots, m_n für Annahmen und n für die Schlussfolgerung. Rechts neben einer Schlussfolgerung notieren wir die Art von Regel, die wir für den Schluss dieser Folgerung angewendet haben, sowie die Referenz auf die Annahme(n), auf die sich die Regel bezieht. In der praktischen Anwendung schreiben wir anstatt m_1, \dots, m_n (und n) die Zeilennummer vor die Annahme (und Konklusion), sodass wir bei der Regelanwendung auch nur diese als Referenz notieren. Im Anschluss an die Definitionen folgen drei nützliche **Ergänzungen zur Struktur einer Ableitung im**

SNS_{AL}: Bewiesene AL-Gesetze, AL-Schlusschemata und AL-Äquivalenzen (vgl. 2.3 Semantik von AL [Skript]) dürfen in einer Ableitung verwendet werden, um sonst komplexere Lösungen zu vereinfachen.

Diese Woche sind insgesamt vier Übungen als Studienleistung zu bearbeiten. Zuerst soll anhand des SNS_{AL} die AL-Gültigkeit von Ableitbarkeitsbehauptungen bewiesen werden. Anschließend ist das SNS_{AL} zu nutzen, um die AL-Beweisbarkeit von Behauptungen zu zeigen. Drittens sind Schlusschemata gegeben, deren AL-Gültigkeit mittels des SNS_{AL} bewiesen werden soll. Zum Schluss sollen natürlich-sprachlich formulierte Schlüsse mit Hilfe von AL-Formeln repräsentiert und deren AL-Gültigkeit überprüft werden. Beachte hierbei, dass du die Zuordnung von AV zu (Teil-)Aussagen explizit machen sollst.