Semantik von AL, Entscheidungsverfahren für AL und Definierbarkeit von Konnektoren

Letzte Woche haben wir uns mit wahrheitsfunktionalen Konnektoren und der Syntax von AL beschäftigt. Konkret haben wir die fünf Konnektoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ im Rahmen unseres AL-Vokabulars eingeführt, welches darüber hinaus AV (in Form von Kleinbuchstaben) und das Komma als technisches Hilfszeichen umfasst. Mittels der eingeführten syntaktischen Regeln von AL können wir nun wohlgeformte Ausdrücke von AL, d.h. AL-Formeln, bilden. Zu Beginn des aktuellen Themas gehen wir von der Syntax zur **Semantik von AL** über und begeben uns auf die Suche nach einer „genau definierten Handlungsvorschrift, mit der sich für eine beliebige Situation errechnen lässt, welchen Wahrheitswert logisch komplexe Sätze ausgehend von den Wahrheitswerten der in ihnen vorkommenden atomaren Sätze in Bezug auf diese Situation haben." Unser Interesse gilt nun also den Wahrheitsbedingungen von AL-Formeln.

Ein grundlegendes Konzept ist die **AL-Bewertung**. Darunter begreifen wir eine Funktion, die AL-Formeln aus dem Definitionsbereich, z.B. ϕ, Wahrheitswerte aus dem Wertebereich, d.h. 1 (wahr) oder 0 (falsch), zuordnet. Dies kommt uns bereits aus der letzten Sitzung bekannt vor, in der wir solch einer Bewertung im Rahmen der Wahrheitstafel begegnet sind. Als nächstes wird der Begriff der **AL-Tautologie** definiert und zusammenfassend gesagt, dass Tautologien immer wahr sind. Für eine AL-Formel bedeutet dies, dass sie aus allem folgen kann; sie ist AL-gültig. Warum sind also $\neg(p \wedge \neg p)$ und $p \vee \neg p$ Beispiele für AL-gültige Formeln, d.h. Tautologien? (Das kannst du leicht mit der Wahrheitstafelmethode zeigen.) Außerdem werden einige AL-Gesetze aufgeführt und gesagt, dass jede Formel, die unter eines dieser logischen Gesetze fällt, eine Tautologie ist. Unter welches Gesetz fällt das Beispiel $\neg\neg(p \vee \neg p) \leftrightarrow p \vee \neg p$? Richtig, es folgt dem gleichen Schema wie $\neg\neg\phi \leftrightarrow \phi$ (das Gesetz der doppelten Negation), wobei in unserem Beispiel ϕ für $p \vee \neg p$ steht. Gegensätzlich zur Tautologie ist die **AL-Kontradiktion**. Kontradiktionen sind immer falsch und entsprechende AL-Formeln können demnach aus nichts folgen; sie sind nicht gültig. Das Beispiel $\phi \wedge \neg\phi$ macht dies auf einfachem Wege deutlich: Wie sollte es wahr sein können, dass es etwa *regnet* und zugleich *nicht regnet*? Wenn eine AL-Formel weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion ist, dann sprechen wir von **AL-Kontingenz**. Folglich muss es jeweils mindestens eine AL-Bewertung geben, welche die Formel insgesamt wahr bzw. falsch macht; es müssen also mindestens zwei Funktionen existieren, die der Gesamtformel einmal die 1 und einmal die 0 als Wahrheitswert zuordnen.

Die **AL-Folgerung** beschreibt eine Formel, die aus einer anderen Formel AL-logisch folgt. In diesem Fall müssen konsequenter Weise alle AL-Bewertungen, welche die erste Formel wahr machen, auch die zweite Formel wahr machen. Bezüglich der Tautologie haben wir gesagt, dass sie „aus allem folgen kann". Dies ist darin begründet, dass die Tautologie ein Spezialfall der AL-Folgerung ist, bei dem egal ist, welche AL-Bewertungen der Ausgangsformel wahr sind, weil jede Bewertung der Tautologie wahr ist. Wenn wir nicht nur die Bewertungen betrachten, welche die AL-Formel wahr machen, sondern auch jene, die ihr den Wahrheitswert 0 zuordnen, dann können wir die **AL-Äquivalenz** begreifen. Zwei Formeln sind AL-äquivalent, wenn alle ihrer AL-Bewertungen identische Wahrheitswerte haben. Schließlich bezeichnet die **AL-Gültigkeit** eines Schlussschemas, dass die Konklusion des Schemas AL-logisch aus seinen Prämissen folgt.

Ein mögliches **Entscheidungsverfahren für AL**, also eine Möglichkeit für unsere gesuchte „genau definierte Handlungsvorschrift“, ist die **Wahrheitstafelmethode**. Wahrheitstafeln haben wir bislang bereits zweimal erwähnt, jedoch noch nicht im Detail eingeführt. Als Beispiel soll nun eine der beiden Formeln aus dem Absatz zur Tautologie herhalten: $\neg(p \wedge \neg p)$. (In der Darstellung verwende ich eine übersichtlichere Mischung aus den beiden eingeführten Varianten.)

p	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$p)$
0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

In der linken Hälfte der Wahrheitstafel werden alle möglichen Belegungen der in der Formel vorkommenden Variablen durchgegangen. Unser Beispiel enthält lediglich die AV p, der entweder der Wahrheitswert 1 oder 0 zugeordnet werden kann. In der rechten Hälfte ist in der Kopfzeile die gesamte Formel aufgeführt, die ferner entlang ihrer Bestandteile in Spalten aufgeteilt ist. Darunter sind zeilenweise die Wahrheitswerte der Konstituenten der Gesamtformel aufgeführt; wenn p wahr ist, muss $\neg p$ falsch sein, $p \wedge \neg p$ ebenso, aber $\neg(p \wedge \neg p)$ muss schließlich wahr sein. Die Spalten werden also nicht von links nach rechts gelesen, sondern entlang des Aufbaus der Formel (und der Bindungskraft der Konnektoren). An der „letzten“ Spalte (die zweite Spalte der Tabelle) können wir die Wahrheitswerte der Gesamtformel ablesen und erkennen, dass sie für alle AL-Bewertungen 1 sind: Die Formel ist eine Tautologie. Sollte die untersuchte Formel mehr als nur eine AV enthalten, wie im Beispiel des Skripts, so empfiehlt sich folgender Aufbau der Wahrheitstafel, bei dem die möglichen Belegungen anhand des Dualsystems hochgezählt (oder wie im Skript heruntergezählt) werden. Die linke Spalte mit den korrespondierenden Zahlen im Dezimalsystem ist hier nur zur Verdeutlichung des binären Hochzählens in den Spalten der AV dargestellt: (Kannst du die Wahrheitstafel selbstständig mit den richtigen Werten füllen?)

dez.	p	q	r	$\neg$	$(p$	$\rightarrow$	$(q$	$\vee$	$r))$
0	0	0	0						
1	0	0	1						
2	0	1	0						
3	0	1	1						
4	1	0	0						
5	1	0	1						
6	1	1	0						
7	1	1	1						

Sollte die AL-Formel in die Form einer einfachen Implikation bringen zu sein, so lässt sich alternativ zur Wahrheitstafel die **Reduktionsmethode** als Entscheidungsverfahren anwenden. Hierbei wird angenommen, dass eine Implikation der Form $\phi \rightarrow \psi$ keine Tautologie ist und es somit mindestens eine AL-Bewertung gibt, die der Formel eine 0 als Wahrheitswert zuordnet, sodass sie insgesamt ungültig ist. In der Variante des indirekten Beweises versuchen wir einen Widerspruch zu entdecken, der unsere Annahme widerlegt; stoßen wir auf einen Widerspruch, so ist die Formel eine Tautologie und in der Konsequenz gültig. Die einzelnen Schritte der Reduktion basieren auf den drei Unterpunkten der Definition der AL-Bewertung. Abschließend rückt die **Definierbarkeit von Konnektoren** in den Fokus. Es wird gezeigt, dass sich Konnektoren mit Hilfe von anderen Konnektoren definieren lassen, sofern die Formeln, in denen die betreffenden Konnektoren vorkommen, logisch äquivalent sind. Eine letzte Anmerkung sagt, dass eine Menge von AL-Konnektoren definitorisch vollständig genannt wird, wenn sich mit ihr alle anderen AL-Konnektoren definieren lassen.

Zum Thema sind insgesamt neun Aufgaben zu bearbeiten. In den ersten beiden Aufgaben sollst du die Wahrheitstafelmethode nutzen, um zum einen zu zeigen, welche AL-Formeln Tautologien bzw. Kontradiktionen sind und zum anderen um anzugeben, welche AL-Formeln logisch äquivalent sind. Der zweite Block bezieht sich auf die Reduktionsmethode. Hier sollst erstens die Gültigkeit von AL-Formeln und zweitens die Gültigkeit von Schlussschemata überprüfen (siehe „Metatheoreme über AL (Beweisbare Sätze über AL)“ im Skript.) In der fünften Aufgabe sollst du überprüfen, ob AL-Formeln Tautologien sind und falls dies nicht der Fall ist, ist die Zuordnung von Wahrheitswerten zu den Teilformeln anzugeben. Die nächste Aufgabe fragt nach der logischen Äquivalenz zweier AL-Formeln und ob eine der beiden aus der anderen folgt. Anschließend ist ein Schlussschema gegeben, dessen AL-Gültigkeit widerlegt werden soll. Danach sollst du die drei Konnektoren $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ und $\vee$ aussagenlogisch äquivalent mit der definitorisch vollständigen Menge $\{\neg, \wedge\}$ definieren. Abschließend soll analog zur Kontravalenz, die „entweder-oder“-Beziehungen ausdrückt, mittels der Wahrheitstafelmethode ein Konnektor für „weder-noch“-Beziehungen eingeführt werden.