Wahrheitsfunktionale Konnektoren und Syntax von AL

Das vorige Kapitel, in dem wir uns mit Logik, Schlüssen und logischen Folgerungen beschäftigt haben, endete mit der Betrachtung von Wahrheitsbedingungen von Sätzen und deren Abhängigkeit von logischen Konstanten. Letztere teilten wir in zwei Arten auf, die in zwei Bereichen der elementaren Logik untersucht werden: „In der Aussagenlogik stehen uns Konnektoren (z.B. *nicht*, *und*, *oder*) als logische Konstanten zur Verfügung, während wir in der Prädikatenlogik der 1. Stufe zusätzlich Quantoren wie *jeder* oder *einige* als Operatoren erhalten.“ Im zweiten Kapitel steht nun die Aussagenlogik (AL) im Mittelpunkt, welche die Wahrheitsbedingungen von Aussagen mit **wahrheitsfunktionalen Konnektoren** untersucht. Aussagen können entweder wahr oder falsch sein; im Falle von zusammengesetzten Aussagen hängt der Wahrheitswert auch von Konnektoren ab, welche die Teilaussagen verbinden. Unser Vokabular von AL umfasst die Konjunktion (*und*), Disjunktion (*oder*), materiale Implikation (*wenn ..., dann*) und materiale Äquivalenz (*genau dann, wenn*), dargestellt durch die Konnektoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.

Wahrheitstafeln veranschaulichen die Wahrheitsbedingungen von Teilaussagen und die Wahrheitswerte der Gesamtaussagen; die Zweiwertigkeit der klassischen Logik ermöglicht es uns hierbei, die Wahrheitswerte durch die Ziffern 1 (wahr) und 0 (falsch) darzustellen. Die folgenden Tabellen bilden (unvollständige) Wahrheitstafeln ab. In der ersten Reihe kannst du probieren, die Teilaussagen ϕ und ψ durch den jeweils passenden Konnektor zu verbinden. Schaue dir dazu die Kombinationen der Wahrheitswerte von den beiden Teilaussagen (1. und 2. Spalte) und die resultierenden Wahrheitswerte der Gesamtaussagen (3. Spalte) an und überlege, zu welchem Konnektor dies insgesamt passt. In der zweiten Reihe sind die Wahrheitstafeln inklusive der verbindenden Konnektoren abgebildet, allerdings ohne die Wahrheitswerte der Gesamtaussagen. Anhand dieser Tabellen kannst du überprüfen, ob du verstanden hast, wie du aus den Wahrheitswerten von Teilaussagen (rein logisch) Wahrheitswerte von Gesamtaussagen ableiten kannst. Eine wichtige Anmerkung ist, dass die gegebenen Wahrheitstafeln auch den Fall der Kontravalenz (*entweder ... oder*) mit dem Symbol : umfassen, das eigentlich kein Bestandteil unseres Vokabulars von AL ist.

ϕ	ψ	
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ϕ	ψ	
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ϕ	ψ	
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ϕ	ψ	
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ϕ	ψ	
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

ϕ	ψ	$\phi : \psi$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

ϕ	ψ	$\phi \leftrightarrow \psi$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Dir ist sicher aufgefallen, dass in den soeben betrachteten Wahrheitstafeln mit der Konjunktion, Disjunktion, materialen Implikation, materialen Äquivalenz und Kontravalenz nur zweistellige Konnektoren abgebildet sind. Zusätzlich in unserem Vokabular von AL enthalten ist die Negation, die ein einstelliger Konnektor ist. Kannst du die zugehörige Wahrheitstafel selbstständig ausfüllen?

ϕ	$\neg\phi$

Wenn wir einen Blick auf die **Syntax von AL** werfen, dann können wir uns das abrufbare Vokabular im Detail vor Augen führen. Um Aussagenvariablen (AV) darzustellen, verwenden wir beliebige Kleinbuchstaben, beispielsweise p oder q. Im Gegensatz zu ϕ oder ψ sind diese AV Bestandteil unserer Objektsprache und nicht der Metasprache, mit der wir über die Objektsprache (z.B. mit Wahrheitstafeln) sprechen. ϕ oder ψ bezeichnen wir also als Metavariablen für Formeln. Eine Formel besteht entweder aus einer AV (atomare Formel) oder sie setzt sich aus ein bzw. zwei AV und einem Konnektor zusammen (komplexe Formeln). Dadurch, dass z.B. $(\phi \wedge \psi)$ wiederum auch eine Formel ist, die sich durch eine einzelne Metavariable darstellen lässt, können Formeln beliebig komplex werden. Wie wir sehen, können wir Formeln mit unseren Konnektoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ modifizieren, die der zweite grundlegende Bestandteil des Vokabulars von AL sind. Ferner benutzen wir das Komma (,) als technisches Hilfszeichen. AV und Konnektoren bezeichnen wir als nicht-logische bzw. logische Grundausdrücke, deren beliebige Verkettung Ausdrücke von AL bilden. Ein wohlgeformter Ausdruck ist eine Formel und hat somit einen definierten Aufbau – kannst du diesen benennen?

Bevor du nun die Übungsaufgaben bearbeiten kannst, müssen wir noch einen letzten Aspekt betrachten: die Klammerung von Formeln. Um Formeln vereinfachen zu können, verwenden wir Konventionen zur Klammereinsparung, nach denen wir die äußersten Klammern stets weglassen und innere Klammern anhand der Bindungsstärke von Konnektoren auf die notwendigen reduzieren können. Am stärksten bindet die Negation, gefolgt von der Konjunktion, Disjunktion, materialen Implikation und schließlich der materialen Äquivalenz. (Kannst du diesen Ausdrücken die Konnektoren $\{\leftrightarrow, \vee, \wedge, \rightarrow, \neg\}$ korrekt zuordnen?) In den Übungsaufgaben sollst du schließlich erstens überprüfen, ob gegebene Ausdrücke wohlgeformt, also Formeln von AL sind. Zweitens sollst du die Klammern in Formeln derart reduzieren, dass nur noch die notwendigen Klammern übrig bleiben und der Rest durch die Bindungsstärke der Konnektoren ausgedrückt wird. In der dritten Aufgabe ist es genau anders herum: Setze Klammern unter Anbetracht der Bindungsstärke von den Konnektoren. Viertens sollst du natürlichsprachliche Konjunktionen mit wahrheitsfunktionalen Konnektoren übersetzen. Zum Abschluss sollst du ganze Sätze in AL übersetzen. Dazu stellst du Aussagen mit AV dar und verbindest sie mit den entsprechenden Konnektoren.